

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

**МАТЕМАТИКА:**  
**часть 2**  
**математический анализ**

Учебное пособие

г. Ставрополь  
2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ПРЕДЕЛЫ .....	4
1.1. Числовые множества.....	4
1.2. Функции .....	4
1.3. Числовая последовательность. Предел последовательности .....	4
1.4. Предел функции .....	5
1.5. Бесконечно большая и малая функции .....	6
1.6. Основные теоремы о пределах .....	7
1.7. Замечательные пределы.....	7
1.8. Решение типовых примеров.....	8
1.9. Задания для самостоятельной работы:.....	12
2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ .....	17
2.1. Непрерывность функции в точке.....	17
2.2. Точки разрыва функции и их классификация .....	17
3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ .....	19
3.1. Определение. Уравнения касательной и нормали к кривой.....	19
3.2. Дифференцирование неявно заданной функции .....	24
3.3. Дифференцирование функции, заданной параметрически .....	24
3.4. Логарифмическое дифференцирование.....	24
3.5. Производные высших порядков явно заданной функции .....	25
3.6. Производные высших порядков неявно заданной функции .....	26
3.7. Производные высших порядков параметрически заданных функций ....	26
4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ .....	30
4.1. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.....	31
4.2. Дифференциалы высших порядков.....	31
5. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ.....	34
5.1. Правила Лопиталья раскрытия неопределенностей вида $0/0$ и $\infty/\infty$ . ....	34
5.2. Исследование функций.....	36

6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.....	45
6.1. Понятие неопределенного интеграла.....	45
6.2. Свойства неопределенного интеграла .....	45
7. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.....	46
7.1. Метод непосредственного интегрирования .....	46
7.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной) .....	49
7.3. Метод интегрирования по частям .....	52
8. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ .....	57
8.1. Определенный интеграл и его свойства .....	57
8.2. Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла .....	62
8.3. Вычисление объемов тел вращения .....	66
8.4. Вычисление длины дуги плоской кривой.....	69
8.5. Вычисление площади поверхности вращения .....	72
Приложение 1. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ.....	75
Приложение 2. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ.....	76
Приложение 3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОДСТАНОВКИ .....	77
Приложение 4. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ.....	78
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>80</b>

# 1. ПРЕДЕЛЫ

## 1.1. Числовые множества

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми.

Примерами числовых множеств являются:

$N = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$  - множество натуральных чисел;

$Z_0 = \{0; 1; 2; \dots; n; \dots\}$  - множество целых неотрицательных чисел;

$Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n; \dots\}$  - множество целых чисел;

$Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$  - множество рациональных чисел;

$I$  - множество иррациональных чисел;

$R$  - множество действительных чисел;

$C$  - множество комплексных чисел.

Между этими множествами существуют соотношения

$$N \subset Z_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C, \quad R = Q \cup I.$$

## 1.2. Функции

Функцией называется соответствие  $f$ , которое каждому элементу  $x \in X$  сопоставляет *один и только один* элемент  $y \in Y$ , и записывается  $y = f(x)$ ,  $x \in X$ . Говорят еще, что функция  $f$  отображает множество  $X$  на множество  $Y$ .

### Основные элементарные функции

- 1) Показательная функция  $y = a^x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- 2) Степенная функция  $y = x^\alpha$ ,  $\alpha \in R$ ;
- 3) Логарифмическая функция  $y = \log_a x$ ,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ;
- 4) Тригонометрические функции  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$ ;
- 5) Обратные тригонометрические функции  $y = \operatorname{arcsin} x$ ,  $y = \operatorname{arccos} x$ ,  
 $y = \operatorname{arctg} x$ ,  $y = \operatorname{arccot} x$ .

## 1.3. Числовая последовательность. Предел последовательности

Под числовой последовательностью  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ , обозначается  $\{x_n\}$ , понимается функция натурального аргумента

$$x_n = f(n), \quad n \in N \tag{1}$$

Например,  $x_n = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \right\}$ ,  $y_n = \{1, 4, 9, \dots, n^2\}$ .

Число  $a$  называется **пределом последовательности**  $\{x_n\}$ , если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon > 0$ , найдется такое натуральное число  $N$ , что при всех  $n > N$  выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon. \quad (2)$$

Коротко определение предела можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

Неравенство (2) равносильно неравенствам  $-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$  или  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ , которые показывают, что элемент  $x_n$  находится в  $\varepsilon$ -окрестности точки  $a$ .

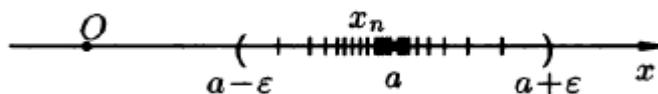


Рисунок 1 -  $\varepsilon$ -окрестность точки  $a$

При выполнении  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , говорят, что последовательность  $\{x_n\}$  сходится к значению  $a$ .

#### 1.4. Предел функции

Пусть функция  $y = f(x)$  определена на некотором множестве  $X$  и пусть  $x_0 \in X$ . Возьмем из множества  $X$  последовательность  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ , элементы которой отличны от  $x_0$  ( $x_n \neq x_0$ ), сходящуюся к  $x_0$ . Последовательность функций  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$  тоже образуют числовую последовательность.

**Определение 1 (по Гейне).** Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любой сходящейся к  $x_0$  последовательности значений аргумента  $\{x_n\}$ , отличных от  $x_0$ , соответствующая последовательность  $\{f(x_n)\}$  значений функции сходится к числу  $A$ .

Записывают  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

Функция  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  может иметь только один предел.

**Определение 2 (по Коши).** Число  $A$  называется пределом функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ , если для любого сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta(\varepsilon) > 0$  такое, что при  $|x - x_0| < \delta$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$  (см. рис.2).

Записывают  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ .

В определении предела функции  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  считается, что  $x$  стремится к  $x_0$  любым способом: слева, справа от  $x_0$  или колеблясь около этой точки. Бывают случаи, когда способ приближения аргумента  $x$  к  $x_0$  существенно влияет на значение предела функции. Поэтому вводят понятия односторонних пределов (см. рис. 3).

Предел слева и справа записывают соответственно:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1; \quad \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

Если в точке  $x_0$  существуют оба предела и они равны  $A_1 = A_2$ , то существует и предел  $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ . Если же  $A_1 \neq A_2$ , то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  не существует.

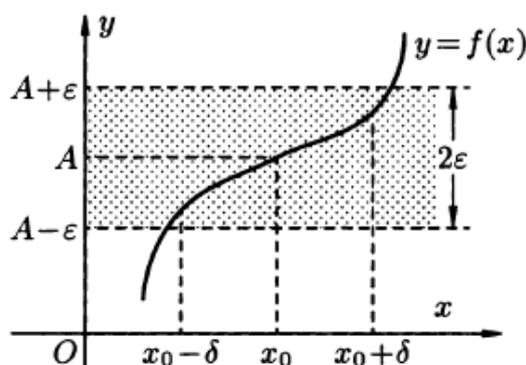


Рисунок 2 - Определение предела

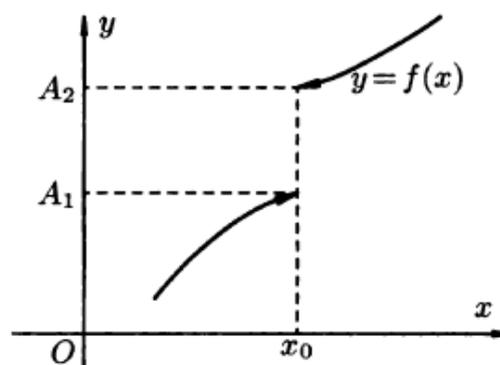


Рисунок 3 - Односторонние пределы

### 1.5. Бесконечно большая и малая функции

Функция  $y = f(x)$  называется *бесконечно большой* (б.б.ф.) при  $x \rightarrow x_0$ , если для сколь угодно большого числа  $M > 0$  существует число  $\delta = \delta(M) > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x)| > M$ :  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ . Например, функция  $y = \frac{1}{x-2}$  есть б.б.ф. при  $x \rightarrow 2$ .

Функция  $y = f(x)$  называется *бесконечно малой* (б.м.ф.) при  $x \rightarrow x_0$ , если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . Например, функция  $y = x^2$  при  $x \rightarrow 0$  есть б.м.ф.

#### Основные теоремы о бесконечных функциях

1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.

2. Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая.
3. Если функция  $\alpha(x)$  - бесконечно малая  $\alpha \neq 0$ , то функция  $\frac{1}{\alpha(x)}$  есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция  $f(x)$  - бесконечно большая, то  $\frac{1}{f(x)}$  - бесконечно малая.

### 1.6. Основные теоремы о пределах

1) Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , а  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm \varphi(x)] = A \pm B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot \varphi(x)] = A \cdot B;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)/\varphi(x)] = A/B, (B \neq 0).$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^n = \left[ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right]^n.$$

$$3) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} C = C;$$

$$4) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} C f(x) = C \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} f(x).$$

### Важнейшие эквивалентности

$$1) \sin x \sim x;$$

$$6) e^x - 1 \sim x;$$

$$2) \operatorname{tg} x \sim x;$$

$$7) a^x - 1 \sim x;$$

$$3) \arcsin x \sim x;$$

$$8) \ln(1+x) \sim x;$$

$$4) \operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$9) \log_a(1+x) \sim x \log_a e;$$

$$10) (1+x)^k - 1 \sim kx;$$

$$5) 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2};$$

$$(\text{в частности } \sqrt{1+x} - 1 \sim \frac{x}{2}).$$

### 1.7. Замечательные пределы

*Первый замечательный предел*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1. \quad (3)$$

*Второй замечательный предел*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (4)$$

### Вычисление пределов

1. Если при  $x \rightarrow x_0$  функция определена, то  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

2. Если функция  $f(x)$  в точке  $x = x_0$  не определена, то необходимо пользуясь свойствами пределов "раскрыть" неопределенность одного из типов « $0/0$ »; « $\infty/\infty$ »; « $0 \cdot \infty$ »; « $\infty - \infty$ »; « $1^\infty$ »; « $0^0$ »; « $\infty^0$ ».

### 1.8. Решение типовых примеров

**Вычислить пределы:**

**Пример 1.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1}$ .

Решение

Так как  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5 \neq 0$ , то применим теорему о пределе частного

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 1} = \frac{4 + 2 - 2}{4 + 1} = \frac{4}{5}.$$

**Пример 2.**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$ .

Решение

Функция  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}$  в точке  $x = 2$  не определена. Так как при  $x = 2$  чис-

литель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то имеем неопределенность вида « $\frac{0}{0}$ ». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было бы сократить на  $x - 2$ . Для

этого разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3), \text{ так как } x^2 - 5x + 6 = 0 \text{ при } x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

$$x^2 - 3x + 2 = (x - 2)(x - 1), \text{ так как } x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ при } x_1 = 2, \quad x_2 = 1.$$

Итак, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{(x - 2)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x - 1} = \frac{2 - 3}{2 - 1} = -1.$$

**Пример 3.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3 - \sqrt{x + 6}}{x - 3}$ .

Решение

При  $x=3$  числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, следовательно, имеем неопределенность « $\frac{0}{0}$ ». Преобразуем дробь так, чтобы ее можно было сократить на  $x-3$ . Для этого числитель и знаменатель умножим на выражение, сопряженное иррациональному выражению  $3-\sqrt{x+6}$ , то есть на выражение  $3+\sqrt{x+6}$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-\sqrt{x+6}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(3-\sqrt{x+6})(3+\sqrt{x+6})}{(x-3)(3+\sqrt{x+6})} = \{\text{перемножив сопряженные}$$

выражения  $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ , избавимся от иррациональности} =

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-(x+6)}{(x-3)(3+\sqrt{x+6})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{(x-3)(3+\sqrt{x+6})} = \\ &= -\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(3+\sqrt{x+6})} = -\frac{1}{3+\sqrt{3+6}} = -\frac{1}{3+3} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

**Пример 4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2}$ .

Решение

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \sin 2x}{x \cdot x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \\ &= 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} \right)^2 = 2 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x}{2x} \right)^2 = 8 \left( \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \right)^2 = 8 \cdot 1 = 8 \end{aligned}$$

**Пример 5.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1}$ .

Решение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3+1) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (3x^2+2x-1) = \infty$$

Следовательно, имеет место неопределенность вида « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Разделим числитель и знаменатель дроби почленно на старшую степень дроби, то есть на  $x^3$ , получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+1}{3x^2+2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \infty.$$

Предел знаменателя равен нулю, следовательно, в знаменателе бесконечно малая функция. Далее применили теорему о связи между бесконечно малой и бесконечно большой величинами.

**Пример 6.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ .

Решение

В заданном примере имеем неопределенность вида « $\infty - \infty$ ». Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное ему выражение, то есть на  $\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}$ , получим

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = 0. \end{aligned}$$

Так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}) = \infty$ , значит в знаменателе бесконечно большая функция. Далее применим теорему о связи между бесконечно большой и бесконечно малой величинами.

**Пример 7.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x}$ .

Решение

Для вычисления этого предела воспользуемся первым замечательным пределом (3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 5x}{5x} = 5 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 5 \cdot 1 = 5.$$

**Пример 8.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 3}{2x + 4} \right)^{4x+2}$ .

Решение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x - 3}{2x + 4} \right)^{4x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x + 4 - 4 - 3}{2x + 4} \right)^{4x+2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{7}{2x + 4} \right)^{4x+2} = I^\infty.$$

Имеем неопределенность вида « $I^\infty$ ». Используем второй замечательный предел (4) и следующую подстановку

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{7}{2x+4}\right)^{4x+2} = \left| \begin{array}{l} \alpha = -\frac{7}{2x+4} \\ x \rightarrow \infty; \alpha \rightarrow 0 \\ x = -\frac{7}{2\alpha} - 2 \end{array} \right| = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{4\left(-\frac{7}{2\alpha} - 2\right) + 2} =$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{-\frac{14}{\alpha} - 6} = \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{-14} \cdot \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{-6} = e^{-14}.$$

**Вычислить односторонние пределы:**

**Пример 9.**  $\lim_{x \rightarrow 2 \pm 0} \frac{4}{(x-2)^3}.$

Решение

Пусть  $x < 2$ , тогда при  $x \rightarrow 2 - 0$  функции  $x - 2$  и  $(x - 2)^3$  являются отрицательными бесконечно малыми, поэтому  $\frac{4}{(x-2)^3}$  – отрицательная бесконечно большая функция. Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 2 - 0} \frac{4}{(x-2)^3} = -\infty.$$

При  $x > 2$  функции  $x - 2$  и  $(x - 2)^3$  – положительные бесконечно малые, поэтому  $\frac{4}{(x-2)^3}$  – положительная бесконечно большая функция, тогда

$$\lim_{x \rightarrow 2 + 0} \frac{4}{(x-2)^3} = +\infty.$$

**Пример 10.**  $\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}.$

Решение

При  $x \rightarrow 1 - 0$  функция  $x - 1$  – отрицательная бесконечно малая, следовательно  $\frac{1}{x-1}$  – отрицательная бесконечно большая функция. Тогда  $2^{\frac{1}{x-1}}$  – бес-

конечно малая функция. Следовательно,  $\lim_{x \rightarrow 1 - 0} \frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}} = 1.$

При  $x \rightarrow 1+0$  функция  $x-1$  – положительная бесконечно малая, следовательно,  $\frac{1}{x-1}$  – положительная бесконечно большая функция. Тогда  $2^{\frac{1}{x-1}}$  – бесконечно большая положительная функция. Таким образом  $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 0$ .

### 1.9. Задания для самостоятельной работы:

Найти пределы:

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{3x^2 - 8x - 3}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 + 10}$ .

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5x + 2}{x + 10^{10}}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x} - 1}{x + 1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5x - 6}{3x^2 + 7x - x^3 - 1}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{\sin 5x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n+3}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x+2}{7x-1}\right)^{2x-3}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right).$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{8-x}}{3x^2 - 8x - 3}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x$$

**17.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x+2}{3x-4} \right)^{2x-3}$

## 2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

### 2.1. Непрерывность функции в точке

Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если она определена в точке  $x_0$  и в ее окрестности; существует предел функции в этой точке, причем равный значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (5)$$

Или: функция  $y = f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если она определена в точке  $x_0$  и бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad (6)$$

Функция  $y = f(x)$  называется непрерывной, в интервале  $(a, b)$ , если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

### 2.2. Точки разрыва функции и их классификация

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции. Они разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва  $x_0$  называется **точкой разрыва первого рода** функции  $y = f(x)$ , если в этой точке существуют конечные односторонние пределы, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1 \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2. \text{ При этом:}$$

а) если  $A_1 = A_2$ , то точка  $x_0$  называется точкой, устранимого разрыва;

б) если  $A_1 \neq A_2$ , то точка  $x_0$  называется точкой, конечного разрыва. Величину  $|A_1 - A_2|$  называют скачком функции в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва  $x_0$  называется **точкой разрыва второго рода** функции  $y = f(x)$ , если по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

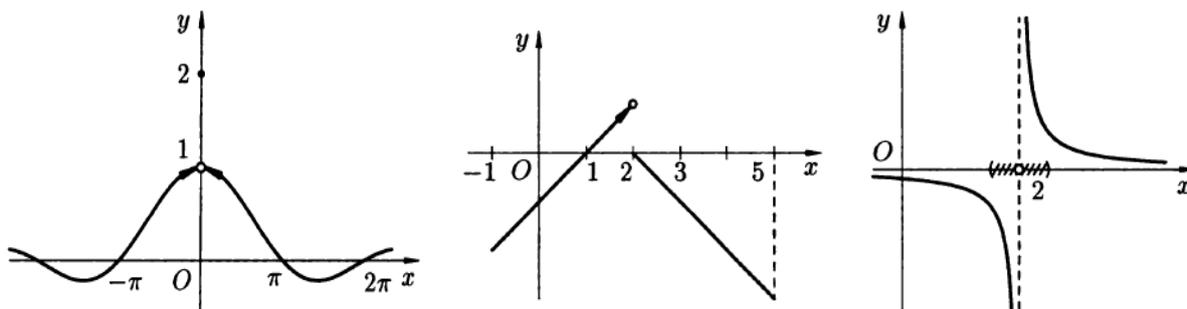


Рисунок 4 - Точки разрыва

**Задания для самостоятельной работы:**

Задана функция  $y=f(x)$ . Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

$$f(x) = \begin{cases} x+4, & \text{если } x < -1, \\ x^2 + 2, & \text{если } -1 \leq x < 1, \\ 2x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2 + 1, & \text{если } 0 < x < 1, \\ x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2x+3}$$

### 3. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

#### 3.1. Определение. Уравнения касательной и нормали к кривой

Производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (7)$$

Если функция  $y = f(x)$  описывает какой-либо физический процесс, то производная  $y'$  есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит *физический смысл производной*.

Производная  $f'(x)$  в точке  $x$  равна угловому коэффициенту касательной  $k = \operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$  к графику функции  $y = f(x)$  в этой точке. В этом заключается *геометрический смысл производной* (см. рис.5).

Уравнение касательной к графику функции в точке  $(x_0, y_0)$  имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (8)$$

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент  $k_{\text{норм.}} = -\frac{1}{k_{\text{кас.}}} = -\frac{1}{f'(x)}$ . Поэтому уравнение нормали имеет вид (см. рис.6):

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) \quad (\text{если } f'(x_0) \neq 0). \quad (9)$$

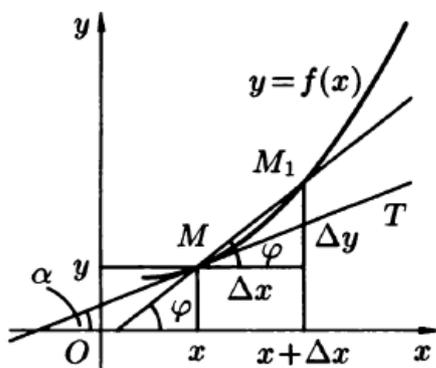


Рисунок 5 - Геометрический смысл производной

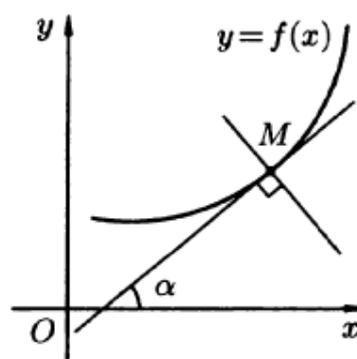


Рисунок 6 - Касательная и нормаль к графику функции

Таблица производных представлена в приложении 1.

**Пример 1.** Найти производную функции  $y = 7^{x^2 - 4x}$ .

$$y' = (7^{x^2 - 4x})' = 7^{x^2 - 4x} \cdot \ln 7 \cdot (x^2 - 4x)' = 7^{x^2 - 4x} \cdot \ln 7 \cdot (2x - 4).$$

**Пример 2.** Найти производные функций: 1)  $y = \arccos x^2$ ; 2)  $y = x \cdot \arctg x$ ;  
3)  $y = (1 + 5x - 3x^3)^4$ ; 4)  $y = \arccos \sqrt{x}$ ; 5)  $y = \log_2^3(3 + 2^{-x})$ .

$$1) ((\arccos x^2)') = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \cdot (x^2)' = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}};$$

$$2) (x \cdot \arctg x)' = x' \cdot \arctg x + x(\arctg x)' = \arctg x + \frac{x}{1+x^2};$$

$$3) ((1 + 5x - 3x^3)^4)' = 4(1 + 5x - 3x^3)^3 \cdot (5 - 9x^2);$$

$$4) (\arccos \sqrt{x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$5) (\log_2^3(3 + 2^{-x}))' = 3 \log_2^2(3 + 2^{-x}) \cdot \frac{1}{(3 + 2^{-x}) \ln 2} \cdot 2^{-x} \cdot \ln 2 \cdot (-1).$$

**Пример 3.** Найти производную функции  $y = \log_2^3(\operatorname{tg} x^4)$ .

Решение: Данная функция является сложной. Ее можно представить в виде цепочки «простых» функций:  $y = u^3$ , где  $u = \log_2 z$ , где  $z = \operatorname{tg} q$ , где  $q = x^4$ . По правилу дифференцирования сложной функции ( $y'_x = y'_u \cdot u'_z \cdot z'_q \cdot q'_x$ ) получаем:

$$y'_x = 3 \cdot \log_2^2 \operatorname{tg} x^4 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^4 \cdot \ln 2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^4} \cdot 4x^3.$$

**Задания для самостоятельной работы:**

Найти производные функций:

1.  $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$

2.  $y = \frac{3}{\sqrt[3]{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}$

3.  $y = \sin 6x$

4.  $y = (1 - 5x)^4$

5.  $y = \sqrt[4]{1 + \cos^2 x}$

6.  $y = \ln(1 + \cos x)$

7.  $y = a^{\sin x}$

8.  $y = \arcsin \sqrt{1 - 4x}$

9.  $y = \ln \sin x - \frac{1}{2} \sin^2 x$

10.  $y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x$

**11.**  $y = (e^{\cos x} + 3)^2$

**12.**  $y = \frac{4 \sin x}{\cos^2 x}$

**13.**  $y = x^{\frac{1}{x}}$

**14.**  $y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}$

**15.**  $y = \frac{x}{x-1} \ln x$

$$16. y = \frac{\sin^2 x}{2 + 3 \cos^2 x}$$

$$17. y = \sqrt{2x - \sin 2x}$$

$$18. y = \ln \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

$$19. y = \ln \cos x - \frac{1}{2} \cos^2 x$$

Найти уравнения касательной и нормали к графику  $y = x^2$  в точке  $x = 2$ . Построить полученные графики.

### 3.2. Дифференцирование неявно заданной функции

Если неявная функция задана уравнением  $F(x; y) = 0$ , то для нахождения производной от  $y$  по  $x$  достаточно продифференцировать это уравнение по  $x$ , рассматривая при этом  $y$  как функцию  $x$ , и полученное затем уравнение разрешить относительно  $y'$ .

**Пример.** Найти производную функции  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ .

Решение: Функция  $y$  задана неявно. Дифференцируем по  $x$  равенство  $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ . Из полученного соотношения  $3x^2 + 3 \cdot y^2 \cdot y' - 3(1 \cdot y + x \cdot y') = 0$  следует, что  $y^2 y' - xy' = y - x^2$ , т.е.  $y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$ .

### 3.3. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Пусть зависимость между аргументом  $x$  и функцией  $y$  задана параметрически в виде двух уравнений

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (10)$$

где  $t$  - вспомогательная переменная, называемая параметром.

Функцию  $y = f(x)$ , определяемую параметрическими уравнениями (10), можно рассматривать как сложную функцию  $y = y(t)$ , где  $t = \varphi(x)$  - обратная для  $x = x(t)$  функция. По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$y'_x = y'_t \cdot y'_x \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (11)$$

**Пример.** Пусть  $\begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$  Найти  $y'_x$ .

$$x'_t = 3t^2, \quad y'_t = 2t, \quad \text{следовательно,} \quad y'_x = \frac{2t}{3t^2}, \quad \text{т. е.} \quad y'_x = \frac{2}{3t}.$$

В этом можно убедиться, найдя непосредственно зависимость  $y$  от  $x$ . Действительно,  $t = \sqrt[3]{x}$ . Тогда  $y = \sqrt[3]{x^2}$ . Отсюда  $y'_x = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ , т. е.  $y = \frac{2}{3t}$ .

### 3.4. Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют логарифмическим дифференцированием.

**Пример 1.** Найти производную функции

$$y = \frac{(x^2 + 2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(x+5)^3}.$$

Решение: Можно найти  $y'$  с помощью правил и формул дифференцирования. Однако такой способ слишком громоздкий. Применим логарифмическое дифференцирование. Логарифмируем функцию:

$$\ln y = \ln(x^2 + 2) + \frac{3}{4} \ln(x-1) + x - 3 \ln(x+5).$$

Дифференцируем это равенство по  $x$ :

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{x^2 + 2} \cdot 2x + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x-1} + 1 - 3 \cdot \frac{1}{x+5}.$$

Выражаем  $y'$ :

$$y' = y \left( \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5} \right),$$

т. е.

$$y' = \frac{(x^2 + 2) \cdot \sqrt[4]{(x-1)^3} \cdot e^x}{(x+5)^3} \cdot \left( \frac{2x}{x^2 + 2} + \frac{3}{4(x-1)} + 1 - \frac{3}{x+5} \right).$$

Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая степенно-показательная функция  $y = u^v$ , где  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  - заданные дифференцируемые функции от  $x$ . Найдем производную этой функции:

$$\ln y = v \cdot \ln u, \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u', \Rightarrow y' = y(v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u'),$$

т.е.  $y' = u^v (v' \cdot \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u')$ ,

или  $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$ . (12)

Итак: *производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии  $u = \text{const}$ , и производной степенной функции, при условии  $v = \text{const}$ .*

**Пример 2.** Найти производную функции  $y = (\sin 2x)^{x^2+1}$ .

Решение: Пользуясь формулой (12), получаем:

$$y' = (\sin 2x)^{x^2+1} \cdot \ln \sin 2x \cdot 2x + (x^2 + 1)(\sin 2x)^{x^2} \cdot \cos 2x \cdot 2.$$

### 3.5. Производные высших порядков явно заданной функции

Производной  $n$ -го порядка (или  $n$ -й производной) называется производная от производной  $(n-1)$  порядка:  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$ .

**Пример.** Найти производную 4-го порядка функции  $y = \sin x$ .

Решение:

$$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'' = (y')' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 2\right),$$

$$y''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 3\right),$$

$$y^{IV} = (-\cos x)' = \sin x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} \cdot 4\right).$$

### 3.6. Производные высших порядков неявно заданной функции

Пусть функция  $y = f(x)$  задана неявно в виде уравнения  $F(x; y) = 0$ .

Продифференцировав это уравнение по  $x$  и разрешив полученное уравнение относительно  $y'$ , найдем производную первого порядка (первую производную). Продифференцировав по  $x$  первую производную, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут  $x$ ,  $y$  и  $y'$ . Подставляя уже найденное значение  $y'$  в выражение второй производной, выразим  $y''$  через  $x$  и  $y$ .

Аналогично поступаем для нахождения производной третьего (и дальше) порядка.

**Пример.** Найти  $y'''$ , если  $x^2 + y^2 = 1$ .

Дифференцируем уравнение  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  по  $x$ :  $2x + 2y \cdot y' = 0$ .

Отсюда  $y' = -\frac{x}{y}$ . Далее имеем:

$$y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2}, \text{ т.е. } y'' = -\frac{y - x \cdot \left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = \frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3} \text{ (т. к. } x^2 + y^2 = 1),$$

$$\text{следовательно, } y''' = -\frac{-1 \cdot 3y^2 \cdot y'}{y^6} = \frac{3}{y^4} \cdot \left(-\frac{x}{y}\right) = -\frac{3x}{y^5}.$$

### 3.7. Производные высших порядков параметрически заданных функций

Из определения второй производной и равенства (11) следует, что

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad \text{т. е.} \quad y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}. \quad (13)$$

Аналогично получаем  $y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}$ ,  $y^{IV}_{xxxx} = \frac{(y'''_{xxx})'_t}{x'_t}, \dots$

**Пример.** Найти вторую производную функции  $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$

Решение: По формуле (11)

$$y'_x = \frac{(y'_t)_t}{(x'_t)_t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctgt}.$$

Тогда по формуле (13):  $y''_{xx} = \frac{(-\operatorname{ctgt})'_t}{(x'_t)_t} = \frac{1}{-\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}.$

**Задания для самостоятельной работы:**

1. Найти производные данных функций.

а)  $\frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

б)  $y \sin x = \cos(x - y)$

$$\text{в) } \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 5x$$

$$\text{г) } y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$$

2. Найти производную 2-го порядка:

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

3. Найти вторую производную функций

$$\begin{cases} x = \cos \frac{t}{2}, \\ y = t - \sin t. \end{cases}$$

4. Найти  $y''$ , если:

$$x - y + a \sin y = 0$$

#### 4. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Дифференциалом функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается  $dy$ :

$$dy = f'(x) \cdot dx. \quad (14)$$

Дифференциал функции равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной.

Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал функции  $y = f(x)$  в точке  $x$  равен приращению ординаты касательной к графику функции ( $dy = AB$ , см. рис.7), когда  $x$  получит приращение  $\Delta x$ .

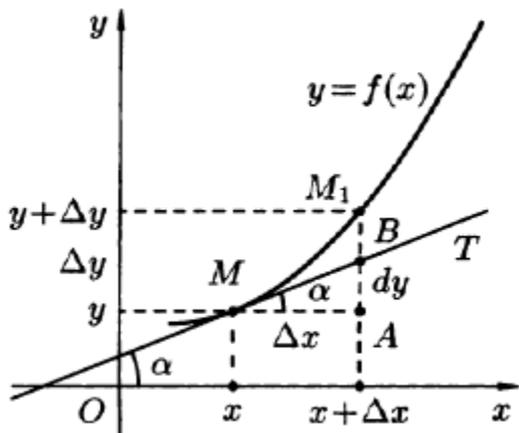


Рисунок 7 - Геометрический смысл дифференциала

**Пример 1.** Найти дифференциал функции  $f(x) = 3x^2 - \sin(l + 2x)$ .

Решение: По формуле  $dy = f'(x)dx$  находим

$$dy = (3x^2 - \sin(l + 2x))' dx = (6x - 2\cos(l + 2x)) dx.$$

**Пример 2.** Найти дифференциал функции  $y = \ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1}$ . Вычислить  $dy$  при  $x = 0$ .

Решение:

$$dy = \left( \ln(1 + e^{10x}) + \sqrt{x^2 + 1} \right)' dx = \left( \frac{10e^{10x}}{1 + e^{10x}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx.$$

Подставив  $x = 0$ , получим

$$dy|_{x=0} = \left( \frac{10}{2} + 0 \right) dx = 5dx.$$

Основные теоремы о дифференциалах легко получить, используя связь дифференциала и производной функции  $dy = f'(x)dx$  и соответствующие теоремы о производных.

Первый дифференциал функции  $y = f(x)$  определяется одной и той же формулой независимо от того, является ли ее аргумент независимой переменной или является функцией другого аргумента. Это свойство дифференциала называют **инвариантностью** (неизменностью) формы первого дифференциала

$$dy = y'_u \cdot du, \quad \text{если } y = f(u), \quad u = \varphi(x). \quad (15)$$

#### 4.1. Применение дифференциала к приближенным вычислениям

основано на приближенном равенстве, справедливом при малых  $\Delta x$

$$\Delta y \approx dy. \quad (16)$$

Подставляя в равенство (16) значения  $\Delta y$  и  $dy$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x; \\ f(x + \Delta x) &\approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x, \end{aligned} \quad (17)$$

причем это равенство тем точнее, чем меньше  $\Delta x$ .

Формула (17) используется для вычислений приближенных значений функций.

**Пример.** Вычислить приближенно  $\operatorname{arctg} 1,05$ .

Решение: Рассмотрим функцию  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ . По формуле (17) имеем:

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + (\operatorname{arctg} x)' \cdot \Delta x,$$

т. е.

$$\operatorname{arctg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{arctg} x + \frac{\Delta x}{1 + x^2}$$

Так как  $x + \Delta x = 1,05$ , то при  $x = 1$  и  $\Delta x = 0,05$  получаем:

$$\operatorname{arctg} 1,05 \approx \operatorname{arctg} 1 + \frac{0,05}{1+1} = \frac{\pi}{4} + 0,025 \approx 0,810.$$

#### 4.2. Дифференциалы высших порядков

Дифференциал от дифференциала функции  $y = f(x)$  называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается  $d^2 y$ .

$$d^2 y = f''(x) dx^2. \quad (18)$$

Здесь  $dx^2$  обозначает  $(dx)^2$ .

Аналогично определяется и находится дифференциал  $n$ -го порядка:

$$d^3 y = f'''(x)(dx)^3; \quad d^n y = d(d^{n-1} y) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

**Пример.** Найти  $d^2 y$ , если  $y = e^{3x}$  и  $x$  - независимая переменная.

Решение: Так как  $y' = 3e^{3x}$ ,  $y'' = 9e^{3x}$ , то по формуле (18) имеем  $d^2 y = 9e^{3x} dx^2$ .

#### Задания для самостоятельной работы:

1. Найти дифференциал функции:

а)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$ ;

б)  $y = \sqrt{1 + x^2};$

в)  $r = 2\varphi - \sin 2\varphi;$

г)  $x = \frac{1}{t^2};$

д)  $d\left(\frac{a}{x} + \operatorname{arctg} \frac{x}{a}\right);$

2. Найти  $d^2 y$ , если

а)  $y = e^{\cos 5x}$

б)  $y = \sin^4 3x$

$$\text{в) } y = 3^{\text{arctg}x^3}$$

$$\text{г) } y = 2\text{tg}^3(x^2 + 1)$$

4. Вычислить приближенные значения выражений:

а)  $\arcsin 0,51$

б)  $\sqrt[4]{15,8}$

в)  $\text{tg} 46^\circ$

## 5. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ

### 5.1. Правила Лопиталья раскрытия неопределенностей вида $0/0$ и $\infty/\infty$ .

Пусть функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки  $x_0$  и обращаются в нуль в этой точке:  $f(x_0) = \varphi(x_0) = 0$ . Пусть  $\varphi'(x) \neq 0$  в окрестности точки  $x_0$ .

Тогда, предел отношения двух бесконечно малых равен пределу отношения их производных, если последний существует.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = l. \quad (19)$$

#### Замечания:

1. Правило Лопиталья (19) верно и в случае, когда функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  не определены при  $x = x_0$ , но  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ .

2. Формула (19) справедлива и в том случае, когда  $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

3. Если производные  $f'(x)$  и  $\varphi'(x)$  удовлетворяют тем же условиям, что и функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  выражения (19), то правило Лопиталья можно применить еще раз:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)} \text{ и т.д.}$$

**Пример 1.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x \ln x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)'}{(x \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x + 1} = 1.$$

**Пример 2.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{2x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin 6x}{4x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cos 6x}{1} = 9.$$

## Раскрытие неопределенностей различных видов

Правило Лопитала применяется для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$

и  $\frac{\infty}{\infty}$ , которые называют *основными*. Неопределенности вида  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,

$0^0$  сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований.

**Пример 3.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ .

Решение: Имеем неопределенность вида  $1^\infty$ . Логарифмируем выражение

$A = (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$ , получим:  $\ln A = \frac{1}{x^2} \ln \cos 2x$ . Затем находим предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 2x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos 2x} (-\sin 2x) 2}{2x} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} = -2,$$

т. е.  $\ln \lim_{x \rightarrow 0} A = -2$ . Отсюда  $\lim_{x \rightarrow 0} A = e^{-2}$ , и  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-2}$ .

**Задания для самостоятельной работы:**

1.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin^3 x}{\cos^2 x}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{\sin(x + 1)}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^3}$

## 5.2. Исследование функций

### Возрастание и убывание функции. Условия экстремума

Если дифференцируемая на интервале  $(a; b)$  функция  $f(x)$  возрастает (убывает), то  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) для  $\forall x \in (a; b)$ .

**Необходимое условие экстремума:** если дифференцируемая функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x_0$ , то ее производная в этой точке равна нулю:

$f'(x_0) = 0$ . Геометрически равенство  $f'(x_0) = 0$  означает, что в точке экстремума дифференцируемой функции  $y = f(x)$  касательная к ее графику параллельна оси  $Ox$ .

Отметим, что обратное утверждение в общем случае не является верным, т. е. если  $f'(x_0) = 0$ , то это не значит, что  $x_0$  - точка экстремума.

Кроме того, существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция  $y = |x|$  в точке  $x = 0$  производной не имеет, но точка  $x = 0$  - точка минимума.

*Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими.*

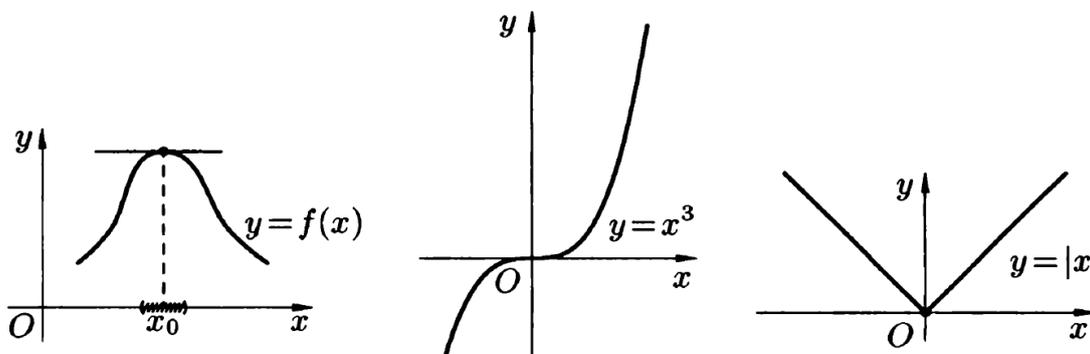


Рисунок 8 - Критические точки

**Достаточное условие экстремума:** если непрерывная функция  $y = f(x)$  дифференцируема в некоторой  $\delta$ -окрестности критической точки  $x_0$  и при переходе через нее (слева направо) производная  $f'(x)$  меняет знак с плюса на минус, то  $x_0$  есть точка максимума; с минуса на плюс, то  $x_0$  - точка минимума.

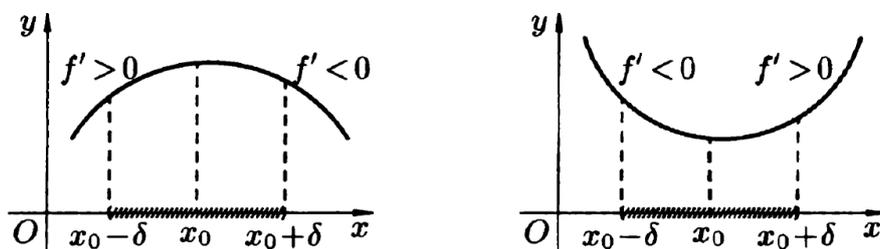


Рисунок 9 - Достаточное условие экстремума

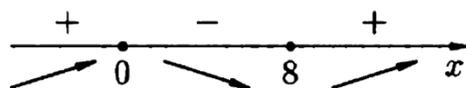
Исследовать функцию на экстремум означает найти все ее экстремумы.

**Пример.** Найти экстремум функции  $y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x^2}$ .

Решение: Очевидно,  $D(y) = R$ .

Находим  $y' = \frac{1}{3} - \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$ , т. е.  $y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{\sqrt[3]{x}}$ .

Производная не существует при  $x_1 = 0$  и равна нулю при  $x_2 = 8$ . Эти точки разбивают всю область определения данной функции на три интервала  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 8)$ ,  $(8; \infty)$ . Отметим на рисунке знаки производной слева и справа от каждой из критических точек.

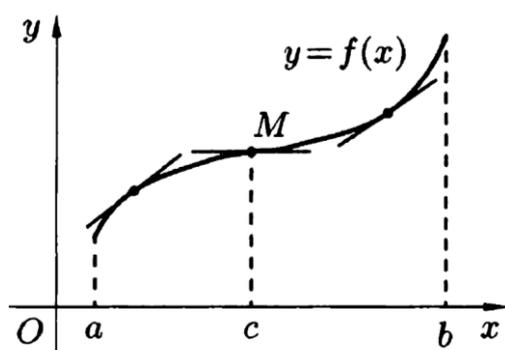


Следовательно,  $x_1 = 0$  - точка максимума,  $y_{\max} = y(0) = 0$ , и  $x_2 = 8$  точка минимума,  $y_{\min} = y(8) = -\frac{4}{3}$ .

Иногда бывает удобным использовать другой достаточный признак существования экстремума, основанный на определении знака второй производной.

### Выпуклость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции  $y = f(x)$  называется *выпуклым вниз* на интервале  $(a; b)$ , если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции  $y = f(x)$  называется *выпуклым вверх* на интервале  $(a; b)$ , если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале.



Точка графика непрерывной функции  $y = f(x)$ , отделяющая его части разной выпуклости, называется *точкой перегиба*.

Если функция  $y = f(x)$  во всех точках интервала  $(a; b)$  имеет *отрицательную вторую производную*, т. е.  $f''(x) < 0$ , то график функции в этом интервале *выпуклый вверх*. Если же  $f''(x) > 0 \forall x \in (a; b)$  - график *выпуклый вниз*.

**Достаточное условие существования точек перегиба.** Если вторая производная  $f''(x)$  при переходе через точку  $x_0$ , в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой  $x_0$  есть точка перегиба.

**Пример.** Исследовать на выпуклость и точки перегиба график функции  $y = x^5 - x + 5$ .

Решение: Находим, что  $y' = 5x^4 - 1$ ,  $y'' = 20x^3$ . Вторая производная существует на всей числовой оси;  $y'' = 0$  при  $x = 0$ .

Отмечаем, что  $y'' > 0$  при  $x > 0$ ;  $y'' < 0$  при  $x < 0$ .

Следовательно, график функции  $y = x^5 - x + 5$  в интервале  $(-\infty; 0)$  выпуклый вверх, в интервале  $(0; \infty)$  - выпуклый вниз. Точка  $(0; 5)$  есть точка перегиба.

### Асимптоты графика функции

*Асимптотой* кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой. Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Говорят, что прямая  $x = a$  является *вертикальной асимптотой* графика функции  $y = f(x)$ , если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ , или  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$ , или  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$ . Обычно это точки разрыва второго рода.

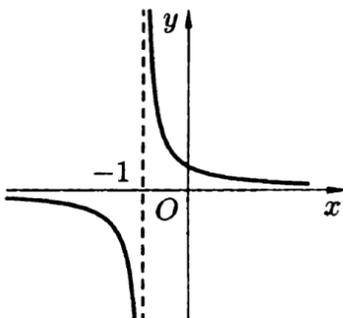


Рисунок 10 - Вертикальная и горизонтальная асимптоты

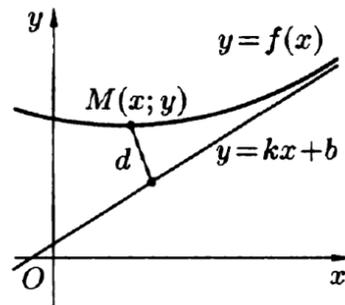


Рисунок 11 - Наклонная асимптота

Например, кривая  $y = \frac{2}{x+1}$  имеет вертикальную асимптоту  $x = -1$ , так как

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{2}{x+1} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{2}{x+1} = -\infty.$$

Уравнение *наклонной асимптоты* будем искать в виде

$$y = kx + b, \tag{20}$$

где  $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx).$  (21)

Если хотя бы один из пределов (21) не существует или равен бесконечности, то кривая  $y = f(x)$  наклонной асимптоты не имеет.

В частности, если  $k = 0$ , то  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ . Поэтому  $y = b$  - уравнение горизонтальной асимптоты.

**Замечание:** Асимптоты графика функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$  могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (21) следует отдельно рассматривать случай, когда  $x \rightarrow +\infty$  и когда  $x \rightarrow -\infty$ .

### Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции  $y = f(x)$  целесообразно вести в определенной последовательности.

1. Найти область определения функции.
2. Найти (если это можно) точки пересечения графика с осями координат.
3. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или общего вида.
4. Найти асимптоты графика функции.
5. Найти интервалы монотонности функции.
6. Найти экстремумы функции.
7. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции.

На основании проведенного исследования построить график функции. Отметим, что приведенная схема исследования не является обязательной. В более простых случаях достаточно выполнить лишь несколько операций.

**Пример.** Исследовать функцию  $y = \frac{x}{1-x^2}$  и построить ее график.

Решение: Выполним все семь операций предложенной выше схемы исследования.

1. Функция не определена при  $x = 1$  и  $x = -1$ . Область ее определения состоит из трех интервалов  $(-\infty; -1)$ ;  $(-1; 1)$ ;  $(1; +\infty)$ , а график из трех ветвей.

2. Если  $x = 0$ , то  $y = 0$ . График пересекает ось  $Oy$  в точке  $O(0; 0)$ ; если  $y = 0$ , то  $x = 0$ . График пересекает ось  $Ox$  в точке  $O(0; 0)$ .

3. Функция  $y = \frac{x}{1-x^2}$  является нечетной, т. к.

$$y(-x) = \frac{-x}{1-(-x)^2} = -\frac{x}{1-x^2} = -y(x).$$

Следовательно, график ее симметричен относительно начала координат. Для построения графика достаточно исследовать ее при  $x \geq 0$ .

4. Прямые  $x=1$  и  $x=-1$  являются ее вертикальными асимптотами. Выясним наличие наклонной асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{1-x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^2} = 0$$

( $k=0$  при  $x \rightarrow +\infty$  и при  $x \rightarrow -\infty$ )

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{1-x^2} - 0x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1-x^2} = 0.$$

Следовательно, есть горизонтальная асимптота, ее уравнение  $y=0$ . Прямая  $y=0$  является асимптотой и при  $x \rightarrow +\infty$ , и при  $x \rightarrow -\infty$ .

5. Находим интервалы возрастания и убывания функции. Так как

$$y' = \left( \frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{1(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2},$$

то  $y' > 0$  в области определения, и функция является возрастающей на каждом интервале области определения.

6. Исследуем функцию на экстремум. Так как  $y' = \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2}$ , то критическими точками являются точки  $x_1=1$  и  $x_2=-1$  ( $y'$  не существует), но они не принадлежат области определения функции. Функция экстремумов не имеет.

7. Исследуем функцию на выпуклость. Находим

$$y'' = \left( \frac{x^2 + 1}{(1-x^2)^2} \right)' = \frac{2x(1-x^2)^2 - (x^2 + 1)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(1-x^2)^3}.$$

Вторая производная равна нулю или не существует в точках  $x_1=0$ ,  $x_2=-1$ ,  $x_3=1$ . На рисунке 12 представлена схема изменения знаков второй производной исследуемой функции. Точка  $O(0,0)$  - точка перегиба графика функции. График выпуклый вверх на интервалах  $(-1;0)$  и  $(1;\infty)$ ; выпуклый вниз на интервалах  $(-\infty;-1)$  и  $(0;1)$ .

График функции изображен на рисунке 13.

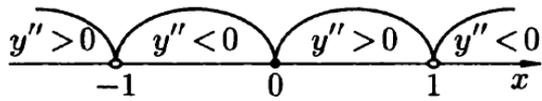


Рисунок 12

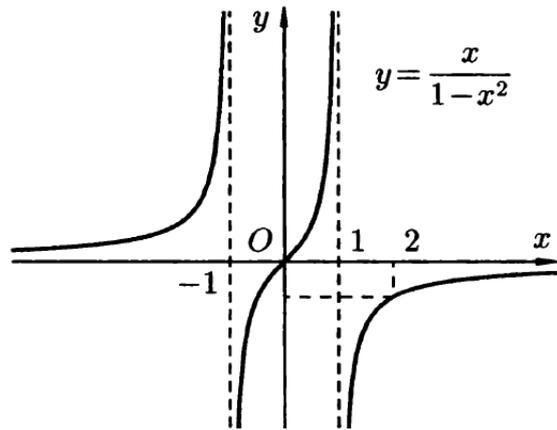


Рисунок 13

**Задания для самостоятельной работы:**

Построить графики функций

1.  $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$

2.  $y = 3x^2 - 2 - x^3$

3.  $y = x^4 - 4x^2 + 3$

4.  $y = \frac{4x}{4+x^2}, [-4, 2].$

## 6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

### 6.1. Понятие неопределенного интеграла

Неопределенный интеграл от функции  $f(x)$  - множество всех первообразных  $F(x) + C$  для  $f(x)$ , который обозначается символом  $\int f(x) dx$

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (22)$$

### 6.2. Свойства неопределенного интеграла

В соответствии с определением (22) неопределенный интеграл обладает следующими свойствами.

$$1. \quad d \int f(x) dx = f(x) dx, \quad \left( \int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Используется для проверки «правильности» интегрирования.

$$2. \quad \int dF(x) = F(x) + C.$$

$$3. \quad \int af(x) dx = a \cdot \int f(x) dx, \quad a \neq 0 - \text{постоянная.}$$

$$4. \quad \int (f(x) \pm g(x)) = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

$$5. \quad \text{Если } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то } \int f(ax + b) \cdot dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

$$\text{Пример: } \int \sin(2x - 5) \cdot dx = -\frac{1}{2} \cos(2x - 5) + C.$$

6. (Инвариантность формулы интегрирования). Если  $\int f(x) dx = F(x) + C$ , то  $\int f(u) du = F(u) + C$ , где  $u = \varphi(x)$  — произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Так из формулы  $\int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$  для различных  $u = \varphi(x)$  получаем:

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C,$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int \ln^2 x \cdot d(\ln x) = \frac{\ln^3 x}{3} + C,$$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

Таблица основных интегралов представлена в приложении 2.

## 7. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

### 7.1. Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием.

При сведении данного интеграла к табличному часто используется операция подведения под знак дифференциала:

$$du = d(u \pm a), \quad du = \frac{1}{a} d(au), \quad \text{где } a - \text{число,}$$

$$\cos u du = d(\sin u), \quad \sin u du = -d(\cos u),$$

$$\frac{1}{u} du = d(\ln u), \quad \frac{1}{\cos^2 u} du = d(\operatorname{tg} u).$$

Вообще,  $f'(u) du = d(f(u))$ , эта формула очень часто используется при вычислении интегралов.

**Примеры:**

$$\begin{aligned} 1. \quad \int (2x^4 - 3x^2 + x - 5) dx &= 2 \int x^4 dx - 3 \int x^2 dx + \int x dx - \int 5 dx = \\ &= \frac{2}{5} x^5 - x^3 + \frac{1}{2} x^2 - 5x + C, \end{aligned}$$

$$2. \quad \int \frac{x+1}{x} dx = \int \left( 1 + \frac{1}{x} \right) dx = x + \ln|x| + C,$$

$$3. \quad \int \frac{dx}{x+3} = \int \frac{d(x+3)}{x+3} = \ln|x+3| + C,$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \int \left( 4x^3 - \frac{5}{\cos^2 2x} + 3^{1-x} \right) dx &= 4 \int x^3 dx - 5 \int \frac{dx}{\cos^2 2x} + \int 3^{1-x} dx = \\ &= x^4 - \frac{5}{2} \operatorname{tg} 2x - \frac{3^{1-x}}{\ln 3} + C, \end{aligned}$$

$$5. \quad \int (3x-1)^{24} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^{25}}{25} + C;$$

$$6. \quad \int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} dx = \int \left( \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = -\operatorname{ctg} x - x + C,$$

$$7. \quad \int \sin^2 6x dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos 12x) dx = \frac{1}{2} \left( x - \frac{1}{12} \sin 12x \right) + C,$$

$$8. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 1 + 2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 2}} =$$

$$= \int \frac{dx(x-1)}{\sqrt{(x-1)^2 + (\sqrt{2})^2}} = \ln|x-1 + \sqrt{x^2 - 2x + 3}| + C;$$

$$9. \int x(x+2)^9 dx = \int (x+2-2)(x+2)^9 dx = \int (x+2)^{10} dx - 2 \int (x+2)^9 dx =$$

$$= \frac{(x+2)^{11}}{11} - 2 \frac{(x+2)^{10}}{10} + C;$$

$$10. \int x^3 \cdot \sqrt[3]{1+x^2} dx = \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} \cdot x \cdot (x^2+1-1) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{4}{3}} d(1+x^2) - \frac{1}{2} \int (1+x^2)^{\frac{1}{3}} d(1+x^2) = \frac{3}{14} (1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8} (1+x^2)^{\frac{4}{3}} + C.$$

**Задания для самостоятельной работы:**

$$1. \int \left( x^2 + 2x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$2. \int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}) dx$$

$$3. \int \frac{(\sqrt{x}-1)^3}{x} dx$$

$$4. \int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$$

$$5. \int (2x\sqrt{x} - 7x)^2 dx$$

$$6. \int e^x \left( 1 - \frac{e^{-x}}{x^2} \right) dx.$$

$$7. \int \sin^2 \frac{x}{2} dx.$$

$$8. \int e^{-3x} dx.$$

$$9. \int (3 - 2x)^4 dx.$$

$$10. \int e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$11. \int \frac{x-2}{x^3} dx$$

$$12. \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$13. \int \left( \frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

## 7.2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

В ряде случаев подынтегральное выражение удается представить в виде

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx. \quad (23)$$

Тогда используя замену переменной интегрирования (подстановку)

$t = \varphi(x)$ , исходный интеграл приводится к новому, более простому интегралу:

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \left| \begin{array}{l} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{array} \right| = \int f(t)dt. \quad (24)$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования  $t$  назад к переменной  $x$ .

Общих методов подбора подстановок не существует. Умение правильно определить подстановку приобретается практикой.

### Примеры:

$$1. \quad \int \frac{dx}{\sqrt{4-3x^2}} = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{3} \cdot x \\ dt = \sqrt{3} \cdot dx \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{t}{2} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{3} \cdot x}{2} + C;$$

$$2. \quad \int tg u du = \int \frac{\sin u \cdot du}{\cos u} = -\int \frac{d(\cos u)}{\cos u} = -\ln|\cos u| + C \quad (\text{вывод формулы 7});$$

$$3. \quad \int \frac{dx}{ctg^5 x \cdot \sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = ctg x \\ dt = \frac{-dx}{\sin^2 x} \end{array} \right| = -\int t^{-5} dt = -\frac{t^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{4ctg^4 x} + C ;$$

$$4. \quad \int x \cdot \sqrt{x-3} dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{x-3} \\ x = t^2 + 3 \\ dx = 2t \cdot dt \end{array} \right| = \int (t^2 + 3) \cdot t \cdot 2tdt = 2 \int (t^4 + 3t^2) dt = \\ = 2 \int t^4 dt + 6 \int t^2 dt = 2 \cdot \frac{t^5}{5} + 6 \cdot \frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(x-3)^{5/2} + 2(x-3)^{3/2} + C.$$

$$5. \quad \int \frac{dx}{e^x + 1} = \left| \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t(t+1)} = \int \frac{dt}{t^2+t} = \int \frac{dt}{\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} =$$

$$= -\int \frac{d\left(t + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(t + \frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \ln \left| \frac{\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}} \right| + C = -\ln \left| \frac{t+1}{-t} \right| = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| = \ln \frac{e^x}{e^x + 1} + C.$$

**Задание для самостоятельной работы:**

1.  $\int 5x \sqrt{1-2x^2} dx$

2.  $\int \frac{x^2 dx}{(3+2x^3)^2}$

3.  $\int \frac{x dx}{\sqrt{2x^2+7}}$

4.  $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$

5.  $\int \sin^2 x \cos x dx.$

6.  $\int \frac{\cos x dx}{\sin^4 x}.$

$$7. \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx$$

$$8. \int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx$$

$$9. \int \frac{2^x dx}{\sqrt{1 - 4^x}}$$

$$10. \int \frac{e^{3x} dx}{1 - e^{3x}}$$

$$11. \int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1 - x^2}}$$

### 7.3. Метод интегрирования по частям

Рассмотрим функцию, которая представляет собой произведение двух других, более простых функций, имеющих непрерывные производные

$$g(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \text{или кратко} \quad g = u \cdot v.$$

Тогда ее дифференциал примет вид  $d(uv) = u \cdot dv + v \cdot du$ . Интегрируя это равенство, получим  $\int d(uv) = uv = \int u dv + \int v du$ , откуда получаем формулу интегрирования по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (25)$$

Эта формула позволяет свести вычисление интеграла  $\int f(x) dx = \int u dv$  к вычислению более простого интеграла  $\int v du$ .

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей  $u$  и  $dv$ ; затем, после нахождения  $v = \int dv$  и  $du = u' dx$ , используется формула (25) интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

#### Примеры:

- $$\int (2x+1)e^{3x} dx = \left. \begin{array}{l} u = 2x+1 \Rightarrow du = 2dx \\ dv = e^{3x} dx \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} \end{array} \right| = (2x+1) \cdot \frac{1}{3}e^{3x} - \int \frac{1}{3}e^{3x} 2 dx = \\ = \frac{1}{3}(2x+1)e^{3x} - \frac{2}{9}e^{3x} + C.$$
- $$\int x \sin x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$
- $$\int x^2 e^x dx = \left. \begin{array}{l} u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2 \int e^x \cdot x dx = \left. \begin{array}{l} u_1 = x \Rightarrow du_1 = dx \\ dv_1 = e^x dx \Rightarrow v_1 = e^x \end{array} \right| = \\ = x^2 e^x - 2(xe^x - \int e^x dx) = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C;$$

Некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям.

**а) Интегралы вида**  $\int P(x)a^{kx} dx$ ,  $\int P(x) \cdot \sin kx dx$ ,  $\int P(x) \cos kx dx$ ,

где  $P(x)$  — многочлен,  $k$  — число. Удобно положить  $u = P(x)$ , а за  $dv$  обозначить все остальные сомножители. Этому случаю соответствуют рассмотренные выше примеры.

б) **Интегралы вида**  $\int P(x) \arcsin x dx$ ,  $\int P(x) \arccos x dx$ ,  $\int P(x) \ln(x) dx$ ,  
 $\int P(x) \operatorname{arctg}(x) dx$ ,  $\int P(x) \operatorname{arcctg}(x) dx$ .

Удобно положить  $P(x) dx = dv$ , а за  $u$  обозначить остальные сомножители.

**Примеры:**

$$1. \quad \int \ln x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x \cdot \ln x - x + C.$$

$$2. \quad \int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{array} \right| = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \\ = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

в) **Интегралы вида**  $\int e^{ax} \cdot \sin b x dx$ ,  $\int e^{ax} \cdot \cos b x dx$ , где  $a$  и  $b$  — числа, называются циклическими.

Они вычисляются двойным применением формулы (25). За  $u$  можно принять, как функцию  $u = e^{ax}$ , так и  $u = \cos b x$ .

**Пример.** Вычислить интегралы

$$I_1 = \int e^{ax} \cos b x dx \text{ и } I_2 = \int e^{ax} \sin b x dx.$$

Для  $I_1$  получим

$$\int e^{ax} \cos b x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = a e^{ax} dx, \\ dv = \cos b x dx, v = \frac{1}{b} \sin b x, \end{array} \right| = \frac{1}{b} e^{ax} \sin b x - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin b x dx.$$

К последнему интегралу снова применим интегрирования по частям:

$$\int e^{ax} \sin b x dx = \left| \begin{array}{l} u = e^{ax}, \quad du = a e^{ax} dx, \\ dv = \sin b x dx, v = -\frac{1}{b} \cos b x \end{array} \right| = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos b x + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos b x dx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим

$$\int e^{ax} \cos b x dx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin b x + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos b x - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos b x dx.$$

Найдем из последнего равенства  $I_1$ :

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bxdx = e^{ax} \left( \frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} \cos bx \right) + C \frac{a^2 + b^2}{b^2},$$

откуда  $I_1 = \int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax} (b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$

Аналогично находим  $I_2 = \int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$

**Пример (вывод формулы 14).**  $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = ?$

Произведем тождественные преобразования. Умножим и разделим подынтегральную функцию на  $\sqrt{a^2 - x^2}$  :

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a^2 \arcsin \frac{x}{a} - \int x \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям:

$$\int x \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \left| \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, v = -\sqrt{a^2 - x^2} \end{array} \right| = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Подставляя последний результат в полученное ранее выражение данного интеграла, будем иметь

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \arcsin \frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Переносим интеграл справа налево и выполнив элементарные преобразования, окончательно получим

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

**Задания для самостоятельной работы:**

1.  $\int (2 - x) \cdot e^{-\frac{x}{2}} dx$

2.  $\int (2x+3) \ln x \, dx$

3.  $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$

4.  $\int (x^2 - 5x - 1) \cos 6x \, dx$

5.  $\int x^3 \operatorname{arctg} x \, dx$

6.  $\int x^2 \cdot 5^{\frac{x}{2}} \, dx$

7.  $\int \frac{\ln x}{x^2} \, dx$

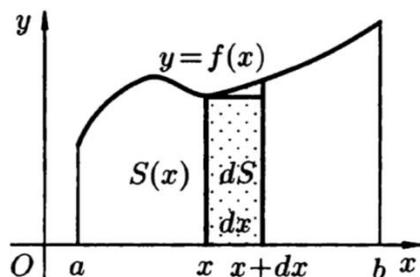
## 8. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

### 8.1. Определенный интеграл и его свойства

**Определенный интеграл** от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  - предел интегральной суммы при  $\max \Delta x_i \rightarrow 0$ , если он не зависит ни от способа разбиения отрезка  $[a, b]$ , ни от выбора точек  $\xi_i$  на отрезках  $[x_{i-1}, x_i]$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i. \quad (26)$$

**Геометрический смысл определенного интеграла** (26) - площадь криволинейной трапеции  $S(x)$ , если  $f(x) \geq 0$  (см. рис. 14):



$$S = \int_a^b f(x) dx \text{ или } S = \int_a^b y dx. \quad (27)$$

Криволинейная трапеция ограничена линиями  
 $y = f(x) \geq 0, x = a, x = b, y = 0$

Рисунок 14 - Геометрический смысл определенного интеграла

#### Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^b [c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)] dx = c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx; \quad (28)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx; \quad (29)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx; \quad (30)$$

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) f(\xi). \quad (31)$$

#### Формула Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (32)$$

где  $F(x)$  - какая-либо первообразная от непрерывной функции  $f(x)$ .

#### Замена переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt, \quad \text{где } x = \varphi(t), \varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b. \quad (33)$$

**Пример 1.** Вычислить интеграл  $\int_4^{16} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)} dx$ .

Применим подстановку  $\sqrt{x} = t; x = t^2; dx = 2t \cdot dt$ . Воспользуемся формулой замены переменной (33) и определим новые пределы интегрирования:  $x = 4$  при  $t = 2$ ,  $x = 16$  при  $t = 4$ , получим

$$\int_4^{16} \frac{\sqrt{x}}{x(\sqrt{x}-1)} dx = \int_2^4 \frac{t \cdot 2t}{t^2(t-1)} dt = 2 \int_2^4 \frac{dt}{t-1} = 2 \ln|t-1| \Big|_2^4 = 2(\ln 3 - \ln 1) = 2 \ln 3.$$

**Пример 2.** Вычислить определенный интеграл  $\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx$ .

Дважды применим формулу интегрирования по частям:  $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$ .

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x^2 - 4 \quad dv = \cos 3x dx \\ du = 2x dx \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right| = \frac{1}{3} (x^2 - 4) \sin 3x \Big|_{-2}^0 - \\ - \frac{2}{3} \int_{-2}^0 x \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin 3x dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right| = -\frac{2}{3} \left( -\frac{1}{3} x \cos 3x \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{3} \int_{-2}^0 \cos 3x dx \right) = \\ = -\frac{2}{3} \left( -\frac{2}{3} \cos 6 + \frac{1}{9} \sin 3x \Big|_{-2}^0 \right) &= \frac{4}{9} \cos 6 - \frac{2}{27} \sin 6. \end{aligned}$$

**Для вычисления несобственных интегралов** необходимо применить предельный переход, то есть изменить пределы интегрирования так, чтобы они стали конечными (для несобственных интегралов 1-го рода) и подынтегральная функция сохранила непрерывность внутри и на концах нового промежутка интегрирования (для несобственных интегралов 2-го рода).

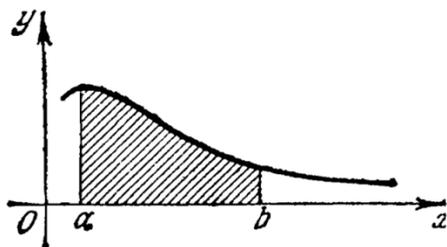


Рисунок 15

Интеграл с бесконечным пределом интегрирования (1-го рода)

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

(34)

Если этот предел существует, то интеграл сходится, иначе - расходится.

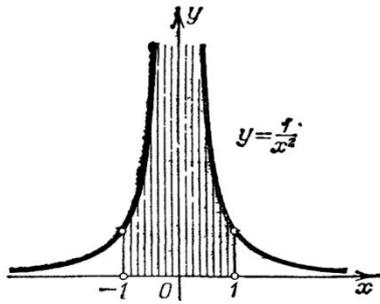


Рисунок 16

Интеграл от разрывной функции (2-го рода)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^b f(x) dx. \quad (35)$$

**Пример 3.** Вычислить интеграл  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ .

Используя выражение (34) для несобственного интеграла 1-го рода, имеем

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b = \frac{\pi}{2}.$$

**Пример 4.** Вычислить интеграл  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ .

Так как подынтегральная функция разрывна в точке  $x=0$ , то данный несобственный интеграл 2-го рода нужно представить как сумму двух слагаемых (35):

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Вычислим каждый предел отдельно:

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{x^2} = - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^{-\varepsilon_1} = - \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{-1} \right) = \infty;$$

$$\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{x^2} = - \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = \infty.$$

Интеграл расходится, как на участке  $[-1, 0]$ , так и на участке  $[0, 1]$ .

Таким образом, данный интеграл расходится на всем отрезке  $[-1, 1]$ .

Отметим, что если вычислять данный интеграл, не обращая внимания на разрыв подынтегральной функции, то получим неверный результат:

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = - \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = - \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{-1} \right) = -2,$$

что невозможно (см. рисунок 16).

**Задания для решения в аудитории:**

1) Вычислить определенный интеграл.

1.  $\int_0^1 x^2 dx$

2.  $\int_1^2 2^{3x-4} dx$

3.  $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x}$

4.  $\int_0^1 xe^{-x} dx$

5.  $\int_{-1}^0 (x^2 + 2x + 1) \sin 3x dx$

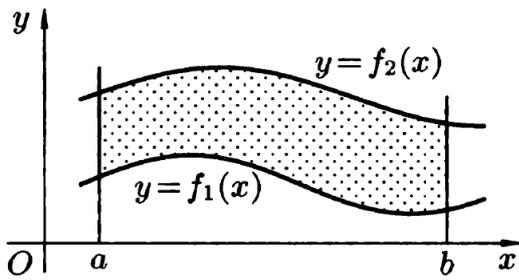
2). Изобразить график подынтегральной функции и найти несобственный интеграл

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+2}$$

$$2. \int_{-\infty}^0 e^x dx$$

$$3. \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

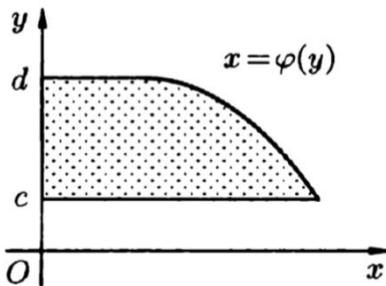
## 8.2. Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла



Интегрирование **по x** в декартовой системе координат (СК)

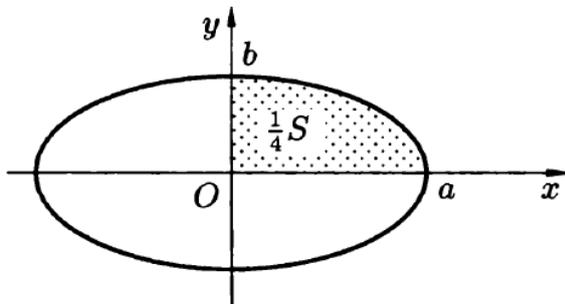
$$S = \int_a^b y \cdot dx, \quad y = f(x); \quad (36)$$

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx. \quad (37)$$



Интегрирование **по y** в декартовой системе координат

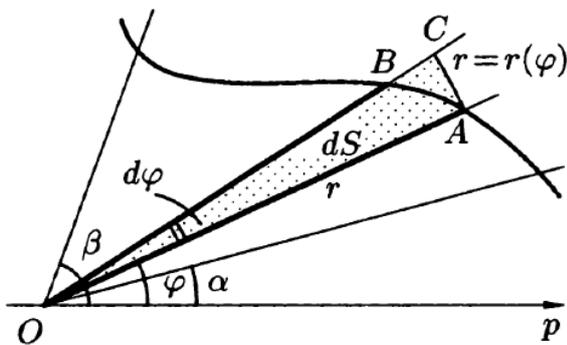
$$S = \int_c^d x \cdot dy, \quad x = \varphi(y). \quad (38)$$



Для параметрически заданных функций в декартовой СК

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

$$S = \int_{x(\alpha)}^{x(\beta)} y dx = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt. \quad (39)$$



В полярной системе координат

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi. \quad (40)$$

Для определения площадей фигур, ограниченных сверху и снизу заданными кривыми  $y_1(x), y_2(x)$ , прежде чем применять соответствующую формулу для нахождения площади нужно определить пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения кривых  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ . Они находятся как решения уравнения:  $y_1(x) = y_2(x)$ . Корни этого уравнения  $x_1, x_2$ , причем  $x_1 < x_2$  являются пределами интегрирования.

**Пример 1.** Вычислить сегмент площади фигуры, ограниченной графиками функций  $y = (x - 2)^3$ ,  $y = 4x - 8$ .

Найдем точки пересечения графиков функций:  $(x - 2)^3 = 4x - 8$ ,

$$(x - 2)^3 = 4(x - 2); \quad (x - 2)((x - 2)^2 - 4) = 0;$$

$$(x - 2) = 0; \rightarrow x_1 = 0; \quad (x - 2)^2 = 4; \rightarrow x_2 = 2, \quad x_3 = 4.$$

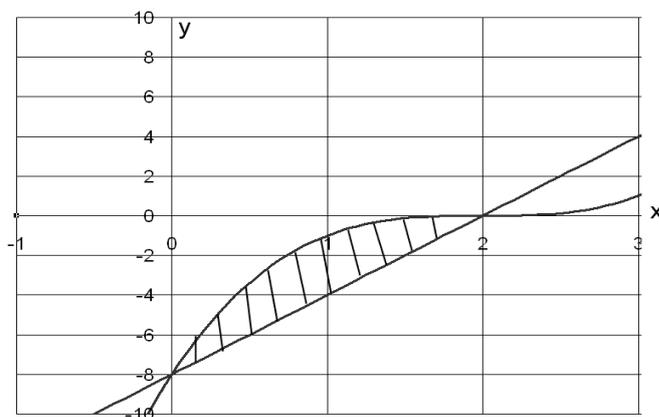


Рисунок 17

Тогда первый сегмент площади отыщется следующим образом (37)

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^2 (4x - 8 - (x - 2)^3) dx = 2 \int_0^2 (4x - 8 - x^3 + 6x^2 - 12x + 8) dx = \\ &= 2 \int_0^2 (6x^2 - x^3 - 8x) dx = 2 \left( 2x^3 - \frac{1}{4}x^4 - 4x^2 \right) \Big|_0^2 = 4 \cdot 2^3 - \frac{1}{2} \cdot 2^4 - 8 \cdot 2^2 = 8. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом  $x = acost$ ,  $y = bsint$  (см. рисунок 18).

Найдем сначала четвертую часть площади  $S$ . Здесь  $x$  изменяется от 0 до  $a$ , следовательно,  $t$  изменяется от  $\frac{\pi}{2}$  до 0. По формуле (39) получим

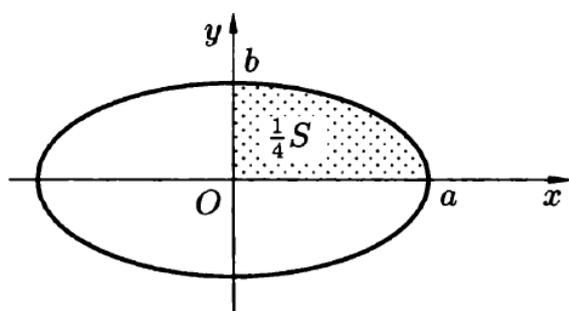


Рисунок 18

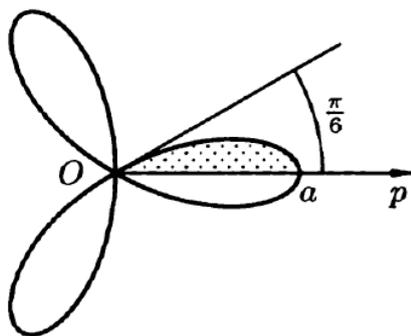
$$\frac{1}{4} S = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t) dt = -ab \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt =$$

$$\begin{aligned} &\frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \\ &= \frac{ab}{2} \left( t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $\frac{1}{4} S = \frac{\pi ab}{4}$ . Значит, площадь всего эллипса  $S = \pi ab$ .

**Пример 3.** Найти площадь фигуры, ограниченной «трехлепестковой розой»  $r = a \cos 3\varphi$  (см. рисунок 19).

Найдем сначала площадь половины одного лепестка «розы», т. е. шестую часть всей площади фигуры:



$$\begin{aligned} \frac{1}{6}S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} (a \cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi = \\ &= \frac{a^2}{4} \left( \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \right) = \frac{a^2}{4} \left( \frac{\pi}{6} + 0 \right) = \frac{\pi a^2}{24}, \end{aligned}$$

т. е.  $\frac{1}{6}S = \frac{\pi a^2}{24}$ . Следовательно,  $S = \frac{\pi a^2}{4}$ .

Рисунок 19

**Задания для решения в аудитории:**

Вычислить площади фигур, ограниченных графиками функций.

1.  $y_1 = 4 - x^2$ ;  $y_2 = x^2 - 2x$ .

2.  $x = \arccos y$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

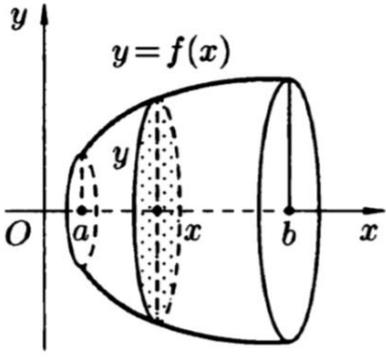
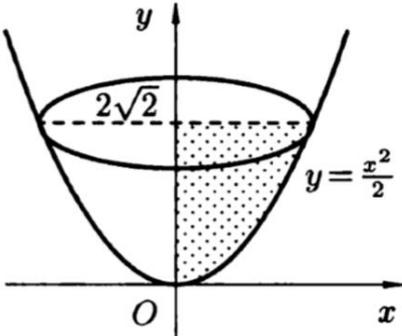
3.  $y = -x^2$ ,  $y = e^x$ ,  $x = 1$ ,  $x = 0$ .

### 8.3. Вычисление объемов тел вращения

При вращении плоской кривой вокруг одной из координатных прямых получается объемная фигура - *тело вращения*.

Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения, есть круг, например, с радиусом  $y = f(x)$ , при вращении вокруг оси  $OX$ . Его площадь  $S(x) = \pi y^2$ .

Тогда объем тела по площади параллельных сечений, равен:

 <p style="text-align: center;">Рисунок 20</p>	$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx, \quad (41)$ <p style="text-align: center;">при вращении вокруг оси <math>OX</math></p>
 <p style="text-align: center;">Рисунок 21</p>	$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy, \quad (42)$ <p style="text-align: center;">при вращении вокруг оси <math>OY</math>.</p>

**Пример 1.** Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 2\sqrt{2}$  вокруг оси  $Oy$  (см. рис. 21).

По формуле (42) находим:

$$V_y = \pi \int_0^{2\sqrt{2}} 2y dy = \pi y^2 \Big|_0^{2\sqrt{2}} = 8\pi.$$

Если фигура, ограничена кривыми  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$ ;  $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$  и прямыми  $x = a$ ,  $x = b$ , вращается вокруг оси  $OX$ , то объем тела вращения:

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx. \quad (43)$$

Если фигура ограничена кривыми  $x_1 = \varphi_1(y)$  и  $x_2 = \varphi_2(y)$  ( $0 \leq \varphi_1(y) \leq \varphi_2(y)$ ) и прямыми  $y = c$ ;  $y = d$  вращается вокруг оси  $OY$ , то объём тела вращения:

$$V_y = \pi \int_c^d (x_2^2 - x_1^2) dy. \quad (44)$$

**Пример 2.** Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций  $y = 2x - x^2$ ;  $y = -x + 2$ , вокруг  $Ox$ .

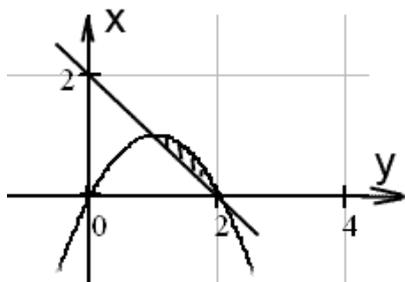


Рисунок 22

По формуле (43) получим

$$\begin{aligned} V_x &= \pi \int_1^2 [(2x - x^2)^2 - (2 - x)^2] dx = \\ &= \pi \int_1^2 [(4x^2 + x^4 - 4x^3) - (2 - x)^2] dx = \end{aligned}$$

$$= \pi \left( \frac{4}{3} x^3 + \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{(2-x)^3}{3} \right) \Big|_1^2 = \pi \left( \frac{4}{3} (8-1) + \frac{32-1}{5} - (16-1) + \frac{(0-1)}{3} \right) = -\pi \frac{7}{15},$$

$$V = \frac{7}{15} \pi.$$

### Задания для решения в аудитории:

Вычислить объёмы тел, образованных вращением фигур, ограниченных графиками функций.

1.  $y = -x^2 + 5x - 6$ ,  $y = 0$ . (ось вращения  $Ox$ )

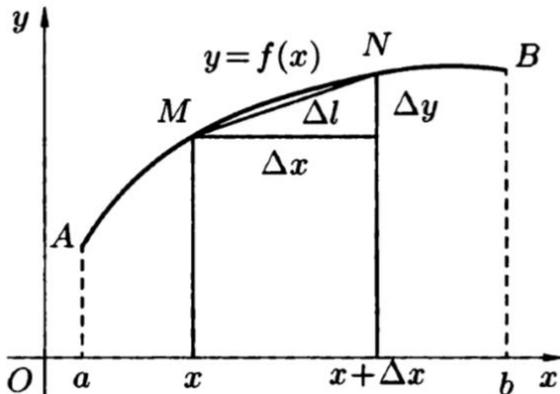
2.  $y = x^2$ ,  $y^2 - x = 0$ . (ось вращения  $Ox$ )

3.  $y = \ln x$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$  (ось вращения  $Oy$ )

4.  $y = x^2$ ,  $y = x^3$  (ось вращения  $Oy$ )

### 8.4. Вычисление длины дуги плоской кривой

Используя теорему Пифагора и кусочно-линейную аппроксимацию плоской кривой, получим



$$l = \int_A^B dl = \int_A^B \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Рисунок 23 - Длина дуги плоской кривой

Длина дуги кривой определяется по формулам:

для кривой, заданной в декартовой системе координат:

$$y = f(x), \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx; \quad (45)$$

для кривой, заданной в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad (46)$$

для кривой, заданной в полярных координатах:

$$r = r(\varphi), \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta, \quad l = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'_\varphi)^2 + r^2} d\varphi. \quad (47)$$

Последнее выражение получено посредством разложения вектора  $r(\varphi)$  на проекции  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ , связывающих полярные и декартовы координаты. Если параметром считать угол  $\varphi$ , то кривая  $AB$  задана параметрически. Воспользовавшись формулой (46), получим

$$\begin{aligned} x'_\varphi &= r'_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi; & y'_\varphi &= r'_\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi; \\ (x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 &= (r'_\varphi \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r'_\varphi \sin \varphi + r \cos \varphi)^2 = (r'_\varphi)^2 + r^2. \end{aligned}$$

В результате получаем (47).

**Пример 1.** Вычислить длину дуги кривой  $y = \ln x$ , содержащейся между точками, для которых  $x = \sqrt{8}$  и  $x = \sqrt{15}$ .

Воспользуемся формулой (45).

Здесь  $a = \sqrt{8}$ ;  $b = \sqrt{15}$ ;  $f(x) = \ln x$ ;  $f'(x) = \frac{1}{x}$ , тогда

$$\begin{aligned}
 l &= \int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x^2 + 1} = t; \quad x^2 + 1 = t^2; \quad x dx = t dt \\ x = \sqrt{8}; \quad t = 3; \quad x = \sqrt{15}; \quad t = 4 \end{array} \right| = \\
 &= \int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{15}} \frac{\sqrt{x^2 + 1} \cdot x dx}{x^2} = \int_3^4 \frac{t \cdot t dt}{t^2 - 1} = \int_3^4 \frac{t^2 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = \int_3^4 \left( 1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = \left( t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_3^4 = \\
 &= 4 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{5} - 3 - \frac{1}{2} \ln \frac{2}{4} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 2} = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{6}{5}.
 \end{aligned}$$

**Пример 2.** Вычислить длину дуги кривой, заданную параметрически

$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t) \\ y = 4(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2.$$

Воспользуемся формулой (46).

$$x' = 4(-\sin t + \sin t + t \cos t) = 4t \cos t; \quad y' = 4(\cos t - \cos t + t \sin t) = 4t \sin t.$$

$$l = \int_0^2 \sqrt{16t^2 \cos^2 t + 16t^2 \sin^2 t} dt = \int_0^2 4t dt = 2t^2 \Big|_0^2 = 2 \cdot 2^2 = 8.$$

**Пример 3.** Вычислить длину дуги кривой, заданную уравнением в полярных координатах  $\rho = 2e^{4\varphi/3}$ ;  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ .

Воспользуемся формулой (47).  $\rho' = \frac{8}{3} e^{4\varphi/3}$ .

$$\begin{aligned}
 l &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{4e^{8\varphi/3} + \frac{64}{9} e^{8\varphi/3}} d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{\frac{100}{9} e^{8\varphi/3}} d\varphi = \frac{10}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{4\varphi/3} d\varphi = \\
 &= \frac{10}{3} \cdot \frac{3}{4} e^{4\varphi/3} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{5}{2} \left( e^{\frac{2\pi}{3}} - e^{-\frac{2\pi}{3}} \right).
 \end{aligned}$$

**Задания для решения в аудитории:**

1) Вычислить длину дуги кривой, заданной в прямоугольной системе координат

$$y = \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x, \quad 0 \leq x \leq \frac{8}{9}.$$

2) Вычислить длины дуг кривых, заданных параметрическими уравнениями.

$$1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq \pi.$$

### 8.5. Вычисление площади поверхности вращения

Найдем площадь  $S$  поверхности, образованной вращением кривой  $AB$  вокруг оси  $Ox$  (рисунок 24). Для этого, по-прежнему, воспользуемся кусочно-линейной аппроксимацией кривой. Тогда элементарный элемент тела вращения можно считать усеченным конусом (рисунок 25), площадь боковой поверхности которого вычисляется по известной формуле

$$S_B = 2\pi \frac{R+r}{2} l = 2\pi R_{cp} l, \quad (48)$$

где  $R_{cp}$  - среднее значение радиусов  $R$  и  $r$ ;  $l$  - образующая.

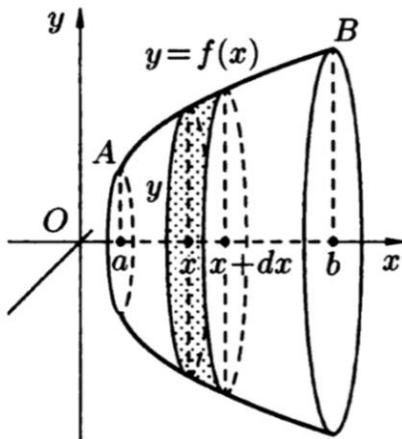


Рисунок 24

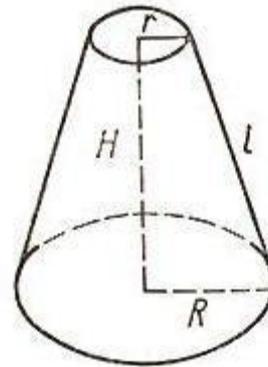


Рисунок 25

Найдем дифференциал площади  $ds$  усеченного конуса с образующей  $dl$ , и радиусами оснований  $y$  и  $y + dy$ . Площадь его боковой поверхности равна

$$ds = \pi(y + y + dy) \cdot dl = 2\pi y dl + \pi dy dl.$$

Отбрасывая произведение  $dy dl$  как бесконечно малую высшего порядка, чем  $ds$ , получаем  $ds = 2\pi y dl$ , или, так как  $dl = \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$ , то  $ds = 2\pi y \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx$ .

Интегрируя полученное равенство в пределах от  $x = a$  до  $x = b$ , получаем искомую площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y'_x)^2} dx. \quad (49)$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями, то по аналогии с (46)

$$S_x = 2\pi \int_\alpha^\beta y(t) \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt. \quad (50)$$

Если кривая задана в полярной системе координат, то по аналогии с (47)

$$S_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r \sin \varphi \sqrt{r^2 + (r'_{\varphi})^2} d\varphi. \quad (51)$$

При вращении кривой вокруг оси  $OY$

$$S_y = 2\pi \int_c^d x \sqrt{1 + (x'_y)^2} dy. \quad (52)$$

**Пример 1.** Найти площадь поверхности шара радиуса  $R$ .

Поверхность шара образована вращением полуокружности  $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,  $-R \leq x \leq R$ , вокруг оси  $Ox$ . По формуле (49) находим

$$\begin{aligned} S_x &= 2\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2} dx = \\ &= 2\pi \int_{-R}^R R dx = 2\pi R \cdot x \Big|_{-R}^R = 4\pi R^2. \end{aligned}$$

**Пример 2.** Дана циклоида

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Найти площадь поверхности, образованной вращением ее вокруг оси  $Ox$ .

**Решение:** При вращении половины дуги циклоиды вокруг оси  $Ox$  площадь поверхности вращения равна, см (50)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_x &= 2\pi \int_0^{\pi} a(1 - \cos t) \cdot \sqrt{(a(1 - \cos t))^2 + (a \sin t)^2} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} a^2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{1 - 2 \cos t + \cos^2 t + \sin^2 t} dt = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot 2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = \\ &= 8\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^2 \frac{t}{2} \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 8\pi a^2 \int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) \sin \frac{t}{2} dt = \\ &= \left. \begin{aligned} u &= \cos \frac{t}{2}; \quad t=0, u=1; \quad t=\pi, u=0 \\ du &= -\frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} dt; \end{aligned} \right| = \\ &= -2 \cdot 8\pi a^2 \int_1^0 (1 - u^2) du = -16\pi a^2 \left( u - \frac{u^3}{3} \right) \Big|_1^0 = -16\pi a^2 \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

т.е.  $\frac{1}{2} S_x = \frac{32}{3} \pi a^2$ . Следовательно,  $S_x = \frac{64}{3} \pi a^2$ .

**Пример 3.** Найти площадь тора, образующегося при вращении окружности  $r = \sin \phi$  вокруг оси  $Ox$ .

$$S_x = 2\pi \int_0^{\pi} \sin \phi \cdot \sin \phi \sqrt{\sin^2 \phi + \cos^2 \phi} d\phi = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos 2\phi) d\phi = \pi^2.$$

**Задания для решения в аудитории:**

1. Найти площадь поверхности, полученной вращением вокруг оси  $Ox$  дуги параболы  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $0 < x < 1$ .

2. Найти площадь поверхности, образованную вращением вокруг оси  $Ox$  дуги  $y = \cos 3x$  от  $x = 0$  до  $x = \frac{\pi}{2}$

## Приложение 1. ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

### Правила дифференцирования

1.  $(u \pm v)' = u' \pm v'$ ;

2.  $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ , в частности,  $(cu)' = c \cdot u'$ ;

3.  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , в частности  $\left(\frac{c}{v}\right)' = -\frac{cv'}{v^2}$ ;

4.  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ , если  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$ ;

5.  $(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'$ .

### Формулы дифференцирования

1.  $(c)' = 0$ ;

2.  $(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ , в частности,  $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$ ;  $\left(\frac{1}{u}\right)' = (u^{-1})' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$

3.  $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ , в частности,  $(e^u)' = e^u \cdot u'$ ;

4.  $(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$ , в частности  $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ ;

5.  $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ ;

6.  $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ ;

7.  $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ ;

8.  $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ ;

9.  $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ ;

10.  $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$ ;

11.  $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ ;

12.  $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$ ;

13.  $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'$ ;

14.  $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'$ ;

15.  $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'$ ;

16.  $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'$ .

## Приложение 2. ТАБЛИЦА ИНТЕГРАЛОВ

1.  $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C \quad (a \neq -1) \quad (\int du = u + C);$
2.  $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$
3.  $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C; \quad \int e^u du = e^u + C;$
4.  $\int \sin u du = -\cos u + C \quad (\int \sin u \cdot du = \cos u + C);$
5.  $\int \cos u du = \sin u + C \quad (\int \cos u \cdot du = -\sin u + C);$
6.  $\int \operatorname{tg} u du = -\ln|\cos u| + C;$
7.  $\int \operatorname{ctg} u du = \ln|\sin u| + C;$
8.  $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C \quad \left( \int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C \right);$
9.  $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C \quad \left( \int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C \right);$
10.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C;$
11.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left| u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right| + C;$
12.  $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C;$
13.  $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+u}{a-u} \right| + C;$
14.  $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + C.$
15.  $\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| u + \sqrt{a^2 + u^2} \right| + C;$
16.  $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right| + C;$
17.  $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$

### Приложение 3. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ И ПОДСТАНОВКИ

1. Интегрирование функции от линейного двучлена:

если  $\int f(x)dx = F(x) + C$ , то  $\int f(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

2. Формула интегрирования по частям:  $\int u dv = uv - \int v du$ .

3. Универсальная тригонометрическая подстановка  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ , тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

4. Тригонометрическая подстановка  $t = \operatorname{tg} x$ , тогда

$$x = \operatorname{arctg} t; \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}; \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}; \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

5. Формулы тригонометрии:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x); \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x);$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

6. Использование тригонометрических подстановок:

$$\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx \rightarrow x = a \cdot \sin t;$$

$$\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx \rightarrow x = a \cdot \operatorname{tg} t;$$

$$\int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx \rightarrow x = \frac{a}{\sin t}.$$

## Приложение 4. ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

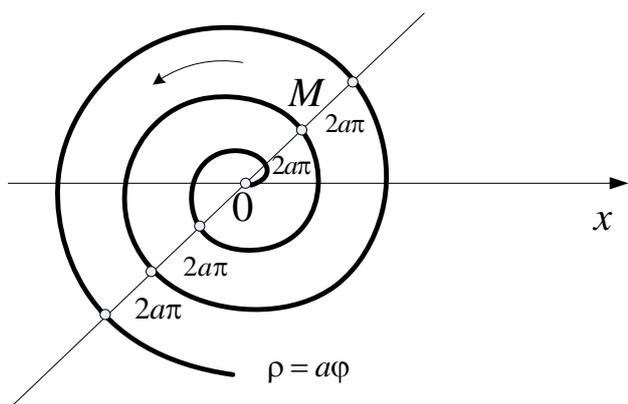


Рисунок 1 - Спираль Архимеда

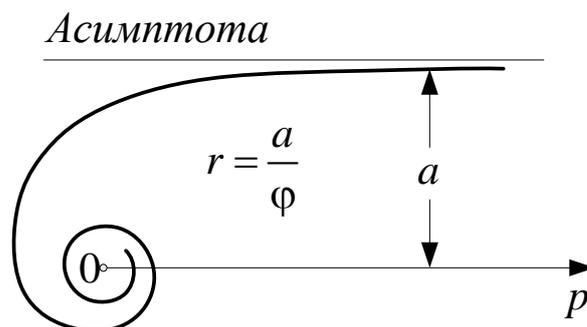


Рисунок 2 - Гиперболическая спираль

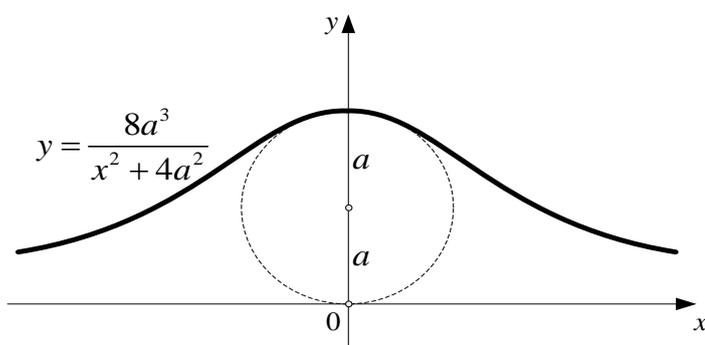


Рисунок 3 - Локон

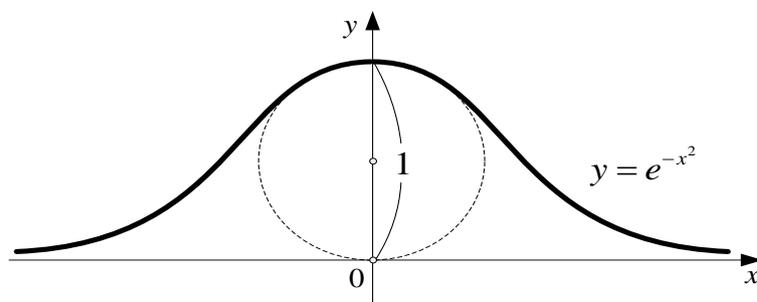


Рисунок 4 - Кривая вероятностей

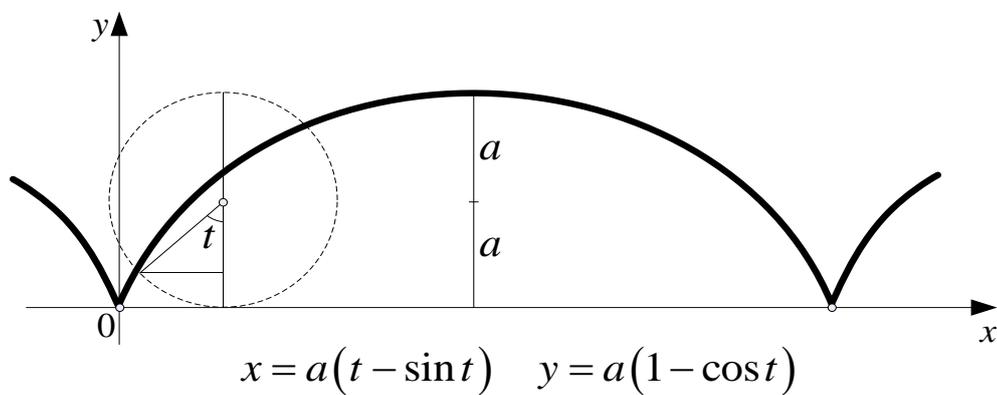


Рисунок 5 - Циклоида

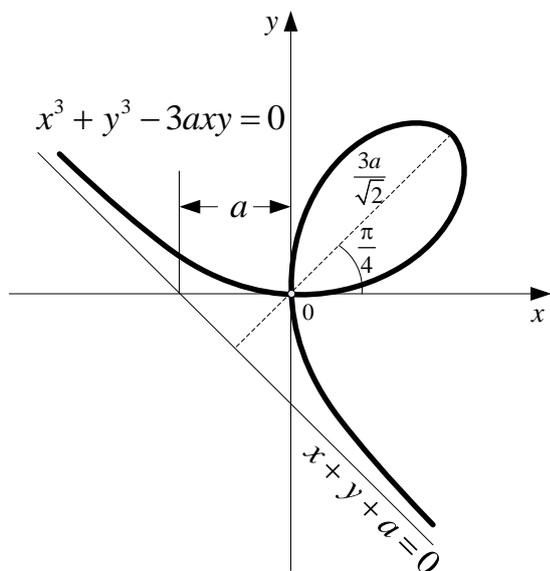


Рисунок 6 - Декартов лист

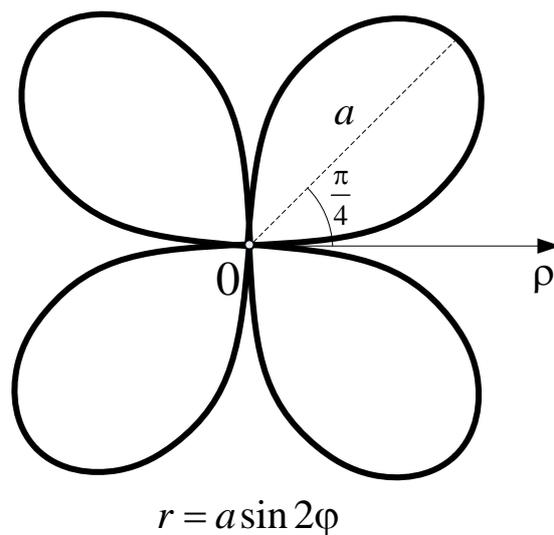


Рисунок 7 - Четырёхлепестковая роза

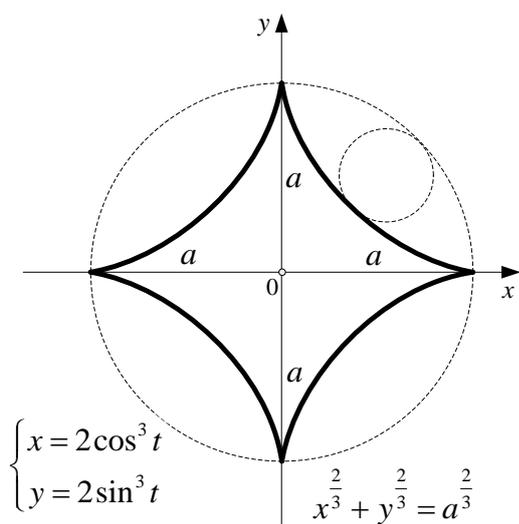


Рисунок 8 - Астроида

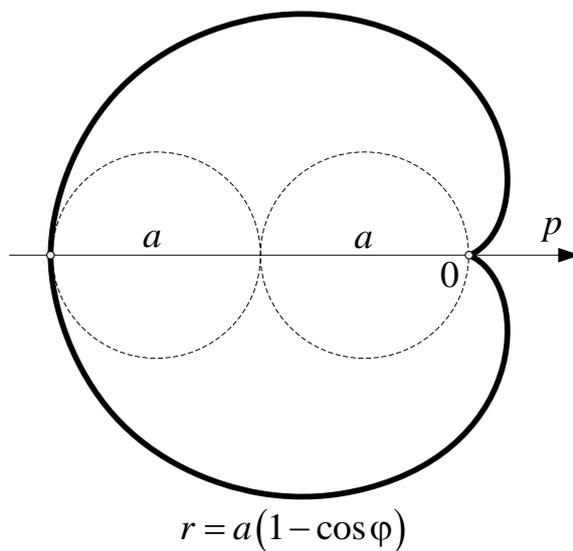


Рисунок 9 - Кардиоида

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

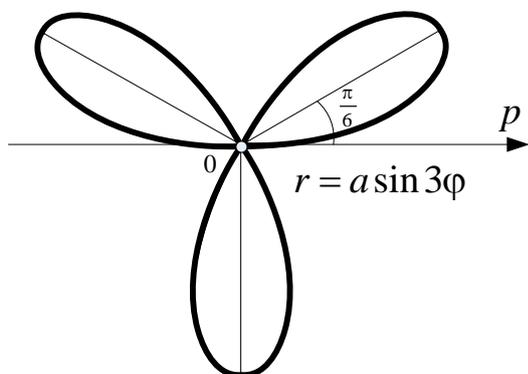


Рисунок 10 - Трёхлепестковая роза

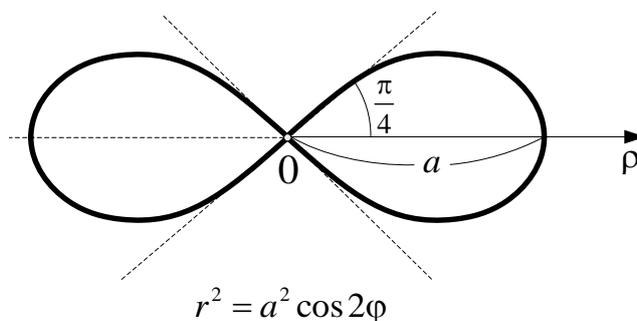


Рисунок 11 - Лемниската Бернулли

## ЛИТЕРАТУРА

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. -10-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2011. - 608 с.
2. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для студентов вузов в 2-х т. Т. 1. - изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 416 с. - (Гр.).
3. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления : учеб. пособие для студентов вузов в 2-х т. Т. 2. - изд. стер. - М. : Интеграл-Пресс, 2007. - 544 с. - (Гр.).
4. Ильин, В. А. Высшая математика : учебник для студентов вузов / Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - 2-е изд., перераб. и доп. - М. : Проспект, 2006. - 600 с. - (Классический университетский учебник. Гр.).
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. — М.:, Физматлит, 2006. — 335 с.
6. Литвин Д.Б., Таволжанская О.Н., Мелешко С.В., Гулай Т.А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной : учебное пособие. - Ставрополь : Сервисшкола, 2016. - 80с.
7. Литвин Д.Б., Мелешко С.В., Яновский А.А. Определенный интеграл. Функции нескольких переменных: Учебное пособие, 2-е издание– Ставрополь : Сервисшкола, 2017. – 62с.

